

Mathématiques

► Inéquations polynômes du 1^{er} et 2nd degré

Fiche méthodologique réalisée par un enseignant de l'Education nationale

Objectifs

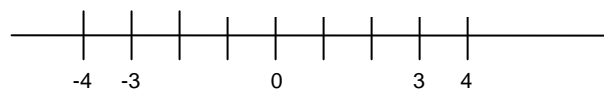
Savoir résoudre des inéquations (et des équations) avec des polynômes est un savoir-faire de base absolument indispensable. Il sera utilisé dans de nombreuses circonstances. Les méthodes utilisées diffèrent selon les degrés des polynômes :

1^{er} degré, par exemple $p_1(x) = 2x + 1$

2^{ème} degré, par exemple $p_2(x) = x^2 + 2x + 1$

Savoirs

Droite des réels en ordre croissant



On a $3 < 4$ et $-3 > -4$

Il vous faut donc toujours vous souvenir qu'à valeurs absolues identiques, l'ordre est inversé lorsque l'on compare des nombres positifs ($3 < 4$) ou lorsque l'on compare des nombres négatifs ($-3 > -4$).

D'une façon plus générale :

Si $x < y$ alors $-x < -y$ x et y appartenant à R .

Méthode

1) Inéquation du 1^{er} degré

Exemple 1

- Résoudre $3x + 2 \leq 5x - 1$, c'est déterminer l'ensemble des valeurs du nombre réel x pour lesquelles l'inégalité est vraie.
- On cherche à aboutir à une inégalité où x est comparé à un nombre réel.
- On procède ainsi : $3x + 2 \leq 5x - 1$



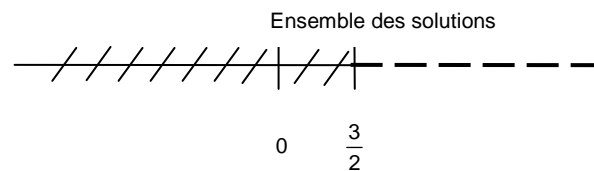
Mathématiques

1ère transposition : $3x - 5x \leq -1 - 2$
Soit $-2x \leq -3$

Attention : $2x > 3$
 $x \geq \frac{3}{2}$

On peut donc conclure que c'est lorsque $x \geq \frac{3}{2}$ que $3x + 2 \leq 5x - 1$.

Soit l'ensemble des solutions :



$$x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty \right[$$

Exemple 2

On est souvent amené à comparer un polynôme à zéro.
Par exemple, résoudre $-3x + 2 \geq 0$, c'est-à-dire que l'on cherche à savoir pour quelles valeurs de x le polynôme $p(x) = -3x + 2$ est positif.

Résolution : $-3x + 2 \geq 0$
 $-3x \geq -2$
 $3x \leq 2$
 $x \leq \frac{2}{3}$

On peut conclure sous cette forme :

x		$\frac{2}{3}$	
$-3x + 2$	+	0	-

Si $x \leq \frac{2}{3}$ alors $-3x + 2 \geq 0$, c'est donc positif.



Mathématiques

2) Inéquation du 2^{ème} degré

Exemple 1

Résoudre $x^2 + 2x + 1 \geq 0$ est un très cas très simple, en effet; cela revient à : $(x + 1)^2 \geq 0$.

Or, un carré est toujours positif ou nul, donc ici toute valeur de x réel convient.

Soit $S = R$ ou

x		1
$x^2 + x + 1$		
	+	0
		-

Exemple 2

Résoudre $x^2 - 3x + 2 \leq 0$

On constate que lorsque $x = 1$, alors $x^2 - 3x + 2 = 0$, donc $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

Il faut donc résoudre $(x - 1)(x - 2) \leq 0$ (négatif)

On va utiliser le savoir-faire précédent (1^{er} degré)

Il vient :

x		1
$x - 1$		
	+	0
		-

x		2
$x - 2$		
	-	0
		+




Mathématiques

Et on compile ces deux résultats en un seul tableau

x		1		2	
x - 1	-	0	+	0	+
x - 2	-		-		+
(x - 1)(x - 2)	+	0	-	0	+

Tableaux précédents



 On applique à chaque colonne la règle des signes des produits de nombres relatifs

Et donc finalement $S =]1 ; 2]$

C'est pour les valeurs de x comprises entre 1 et 2 que l'on aura :
 $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

Exemple 3

Résoudre $x^2 + 3x + 1 < 0$

Dans ce cas-là, $P(x) = x^2 + 3x + 1$ est de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = 1$.

On ne réussit pas à déterminer une valeur évidente de x pour laquelle on ait

$x^2 + 3x + 1 = 0$. On utilise alors une méthode qu'il faut connaître par cœur.

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

a. Si $\Delta > 0$, c'est le cas ici : $\Delta = 9 - 4 = 5$, alors l'équation $x^2 + 3x + 1 = 0$ admet 2 solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$$



Mathématiques

Et on a alors :

x		x'		x''	
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

Soit ici

x		$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

$$\text{D'où } S = \left] \frac{-3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right[$$

b. Si $\Delta = 0$, on aura alors une seule solution pour $P(x) = 0$ et :

x		x_0	
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$

c. Si $\Delta < 0$, le polynôme est toujours du signe de a .